

DEGRÉ**Exercice 1.1.** —

- (a) Montrer que la somme des degrés des sommets d'un graphe G non-orienté est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$.
- (b) En déduire que le nombre de sommets de degré impair est pair.
- (c) Combien d'arêtes contient le graphe complet sur n sommets ?

Exercice 1.2. —

- (a) Combien y a-t-il de matches aller dans une division composée de 15 équipes ?
- (b) Les chercheurs d'un comité d'experts ont formé 8 commissions pour rendre des rapports sur 8 projets. Chaque chercheur fait partie de deux commissions exactement et deux commissions quelconques ont exactement un chercheur en commun. Combien y a-t-il de chercheurs dans ce comité ?

Exercice 1.3. — Montrer que chaque graphe simple (ayant au moins deux sommets) contient au moins deux sommets de même degré.

Exercice 1.4. — On dispose de 15 micro-ordinateurs PC et de seulement 9 imprimantes. On doit connecter directement les PC aux imprimantes de sorte que les utilisateurs de 9 PC quelconques (parmi les 15) puissent utiliser les 9 imprimantes simultanément. On peut évidemment réaliser une connexion avec cette propriété avec $15 \times 9 = 135$ liaisons, mais quel est le nombre minimum de liaisons nécessaires ? Justifier ce minimum et donner une réalisation.

Exercice 1.5. — On dit que la suite d'entiers $(d_1, \dots, d_n)$ est graphique, s'il existe un graphe simple G de sommets $(v_1, \dots, v_n)$ tels que, pour tout i , v_i soit de degré d_i . $(d_1, \dots, d_n)$ est appelée suite des degrés de G . Parmi les suites suivantes, lesquelles sont graphiques ? $(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, $(3, 3, 1, 1)$, $(3, 3, 2, 2)$, $(1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6)$, $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$.

COLORATION

Exercice 1.6. — Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, de degré maximum Δ . Montrer qu'on peut colorier les sommets de G avec $\Delta + 1$ couleurs, de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.

Exercice 1.7. — Une entreprise de déménagement doit réaliser 8 demandes. A chaque opération correspond un intervalle de temps (début-fin) : A(5h-13h), B(6h-9h), C(7h-11h), D(8h-15h), E(10h-19h), F(12h-20h), G(14h-17h), H(18h-21h). A l'aide d'un graphe, modéliser le problème de la minimisation du nombre d'équipes nécessaires. Traiter l'exemple.