

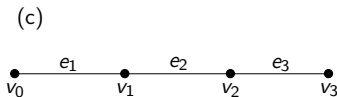
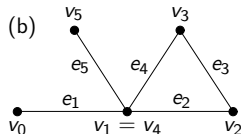
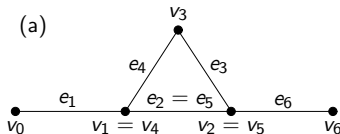
Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
Connexité + Cycles + Graphes orientés

Zoltán Szigeti

Laboratoire G-SCOP
INP Grenoble, France

Définitions

- (a) **Chaîne** : une suite alternée de sommets et d'arêtes :
 $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i \leq k$.
(s, t)-chaîne : une chaîne de s à t .
- (b) Chaîne **simple** : chaîne telle que les arêtes sont distinctes.
- (c) Chaîne **élémentaire** : chaîne telle que les sommets sont distincts.

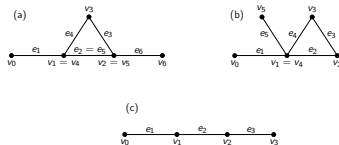


Équivalence sur les chaînes

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe une (s, t) -chaîne.
- (b) Il existe une (s, t) -chaîne simple.
- (c) Il existe une (s, t) -chaîne élémentaire.



Démonstration

(c) $\implies$ (b) $\implies$ (a) : évident.

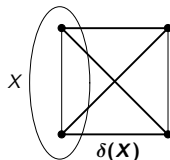
(a) $\implies$ (c) :

- Soit P une (s, t) -chaîne ayant un nombre minimum d'arêtes.
- Si $v_i = v_j$ alors en supprimant la sous-suite $v_i e_i \dots v_{j-1} e_{j-1}$ entre v_i et v_j on a une (s, t) -chaîne qui est plus courte que P , contradiction.
- P est donc élémentaire.

Caractérisation de l'existence d'une (s, t) -chaîne

Définitions : pour un sous-ensemble X de sommets,

- ① **coupe** de X : l'ensemble $\delta(X)$ des arêtes entre X et $V(G) \setminus X$.
- ② **degré** de X : $d(X) = |\delta(X)|$.



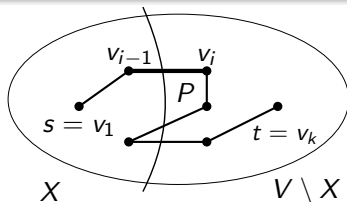
Théorème

- ① Il existe une (s, t) -chaîne dans $G = (V, E)$ $\iff$
- ② $d(X) \geq 1 \quad \forall s \in X \subseteq V \setminus t$.

Caractérisation de l'existence d'une (s, t) -chaîne

Démonstration de nécessité

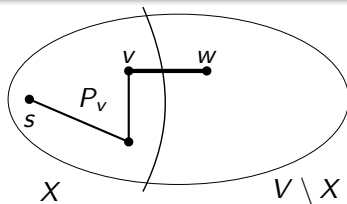
- 1 Supposons qu'il existe une (s, t) -chaîne $P = v_1 v_2 \dots v_k$ et que $s \in X \subseteq V \setminus t$.
- 2 Soit i le plus petit indice tel que $v_i \in V \setminus X$ (existe car $v_k \in V \setminus X$).
- 3 Comme $v_1 \in X$, on a $i \geq 2$, d'où $v_{i-1} \in X$, et donc
- 4 l'arête $v_{i-1}v_i$ de P appartient à la coupe définie par X , d'où
- 5 $d(X) \geq 1$.



Caractérisation de l'existence d'une (s, t) -chaîne

Démonstration de suffisance

- 1 Supposons que $d(X) \geq 1 \quad \forall s \in X \subseteq V \setminus t$.
- 2 Soit $X = \{v \in V : \text{il existe une } (s, v)\text{-chaîne } P_v \text{ dans } G\}$, $s \in X$.
- 3 $d(X) = 0$: s'il existait $vw \in E$, $v \in X$, $w \in V \setminus X$ alors $P_v + vw$ serait une (s, w) -chaîne, ainsi $w \in X$, contradiction.
- 4 Par la condition, $t \in X$, c'est-à-dire
- 5 qu'il existe une (s, t) -chaîne.



Trouver une (s, t) -chaîne

Algorithme Chaîne

ENTRÉE: Un graphe G et deux sommets distincts s et t de G .

SORTIE : Une (s, t) -chaîne P de G ou un certificat X qu'il n'y en a pas.

Etape 0: *Initialisation*. $S := \{s\}$, $p(s) := s$.

Etape 1: *Marquage*.

Tant que $t \notin S$ et qu'il existe une arête uv de G telle que $u \in S, v \notin S$ faire :

$S := S \cup \{v\}$, $p(v) := u$.

Etape 2: *Construction de la chaîne*.

Si $t \in S$ faire :

$v := t$, $P := v$,

tant que $p(v) \neq v$ faire :

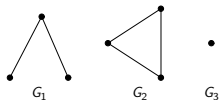
$u := p(v)$, $e := uv$, $P := ueP$, $v := u$,

STOP.

Etape 3: *Construction du certificat*. $X := S$, STOP.

Définitions

- ❶ **graphe connexe** : Il existe une chaîne entre chaque paire de sommets dans le graphe.
- ❷ **composantes connexes** d'un graphe : Les sous-graphes connexes maximaux du graphe.



Remarque

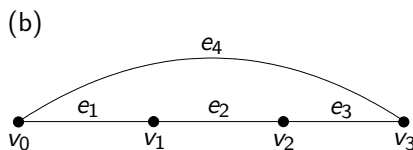
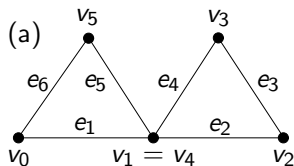
- ❶ G est connexe $\iff G$ a exactement une composante connexe.
- ❷ Il n'y a pas d'arêtes entre les composantes connexes.

Théorème (Caractérisation d'un graphe connexe)

Un graphe $G = (V, E)$ est connexe $\iff d(X) \geq 1 \quad \forall \emptyset \neq X \subset V$.

Définitions

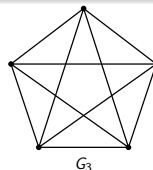
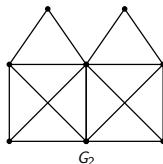
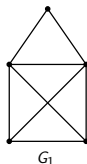
- (a) **Cycle** : une séquence circulaire de sommets et d'arêtes :
 $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $e_k = v_{k-1} v_0$ sont des arêtes distinctes.
- (b) Cycle **élémentaire** : un cycle dont les sommets sont distincts.



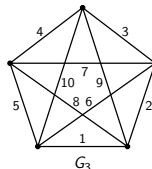
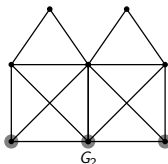
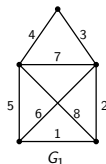
Motivation

Est-il possible de dessiner les arêtes des graphes suivants consécutivement

- 1 sans lever le crayon et
- 2 sans passer deux fois sur la même arête?



Graphes Eulériens



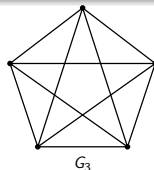
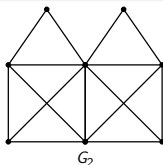
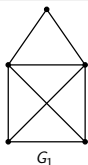
G_1 et G_3 : On peut dessiner les arêtes dans l'ordre indiqué sur la Figure.

G_2 : il n'est pas possible :

- 1 Supposons qu'il y ait une solution pour G_2 , avec v_1 et v_m premier et dernier sommet visité.
- 2 Si on a passé k fois par un sommet $v \neq v_1, v_m$ alors $d(v) = 2k$.
- 3 G_2 devrait donc contenir au plus deux sommets de degré impair.
- 4 Or les trois sommets de G_2 indiqués sur la Figure sont de degré impair.

Définition

- 1 Chaîne **eulérienne** de G : chaîne simple contenant toutes les arêtes de G .
- 2 Cycle **eulérien** de G : cycle contenant toutes les arêtes de G .
- 3 Graphe **eulérien** : graphe qui possède un cycle eulérien.



Théorème (Caractérisation des graphes eulériens)

Un graphe G sans sommet isolé (v **isolé** : $d(v) = 0$) est eulérien $\iff$

- 1 il est connexe et
- 2 tous ses sommets sont de degré pair.

Démonstration de la nécessité

- 1 Soit C un cycle eulérien de G , donc $E(G) = E(C)$.
- 2 Puisque G n'a pas de sommet isolé, $V(G) = V(C)$.
- 3 Pour toute paire $u, v \in V(G)$, en parcourant le cycle C , on a une (u, v) -chaîne, donc le graphe est connexe.
- 4 Si C passe k fois par un sommet v alors $d_G(v) = d_C(v) = 2k$.

Démonstration de la suffisance

ALGORITHME DE FLEURY

ENTRÉE: Un graphe connexe G dont tous les sommets sont de degré pair.

SORTIE : Un cycle eulérien C de G .

Etape 1: *Initialisation.*

Choisir un sommet u de G , $C := u$.

Etape 2: *Construction du cycle.*

Tant que u n'est pas un sommet isolé de G faire :

Choisir une arête $e = uv$ de G incidente à u ,
si possible contenue dans un cycle de G .

$C := Cev$,

$G := G - e$,

$u := v$.

Etape 3: *Fin de l'algorithme.*

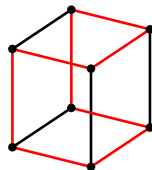
STOP.

Motivation : Problème du Voyageur de commerce

- 1 Le voyageur de commerce doit passer par chaque grande ville de la France une et une seule fois en minimisant la distance parcourue.
- 2 Dans un graphe complet avec des coûts sur les arêtes, trouver un cycle élémentaire contenant tous les sommets dont le coût total est minimal.

Définitions

- 1 Cycle **hamiltonien** de G : cycle élémentaire contenant tous les sommets de G .
- 2 Graphe **hamiltonien** : graphe qui possède un cycle hamiltonien.

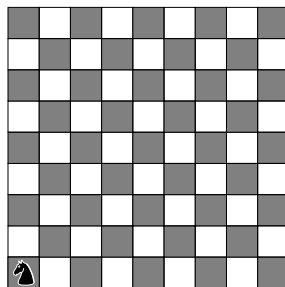
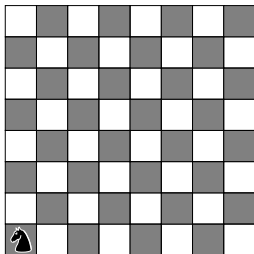


Problème

Décider si un graphe donné est hamiltonien.

Application

Sur un échiquier 8×8 (FIG. (a)), un cavalier posé sur la case en bas à gauche, peut-il se déplacer de telle sorte qu'il revienne à la case de départ après avoir exploré chacune des cases une fois et une seule fois ?



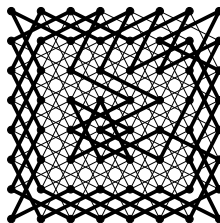
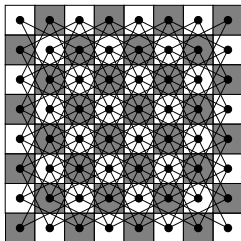
Graphes hamiltoniens

Solution

A l'échiquier $k \times k$ on associe le graphe $G_{k \times k}$ suivant :

les sommets sont les cases et deux sommets sont reliés par une arête si les deux cases correspondantes sont disposées de manière à ce qu'un mouvement du cavalier permette de passer de l'une à l'autre.

La question est : ce graphe possède-t-il un cycle hamiltonien ?



Une condition suffisante

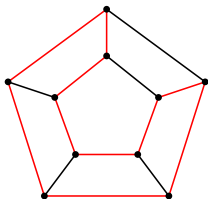
Théorème (Dirac) (sans démonstration)

Si G est un graphe simple à $n \geq 3$ sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $n/2$, alors G est hamiltonien.

Complexité

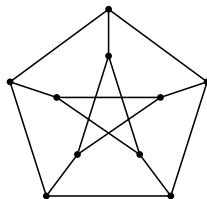
Facile

S'il existe un cycle hamiltonien :
certificat = un cycle hamiltonien.



Difficile

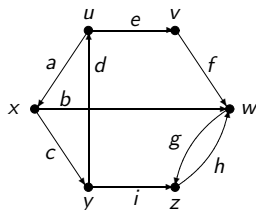
S'il n'existe pas de cycle hamiltonien:
on n'a pas de certificat.



Définitions

Grphe orienté $G = (V, A)$:

- **sommets** : $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$,
- **arcs** : $A(G) = \{a_1, \dots, a_m\}$, un arc est un couple de sommets,
- **extrémité initiale** : v_j pour l'arc $a_i = v_j v_k$,
- **extrémité terminale** : v_k pour l'arc $a_i = v_j v_k$,
- **Attention !** : $v_j v_k \neq v_k v_j$.



• sommet
→ arc

$V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$
 $A(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Définition

- **degré sortant** $d^+(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs sortants de v ,
- **degré entrant** $d^-(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs entrants dans v .

Théorème

La somme des degrés sortants des sommets du graphe orienté $G = (V, A)$ est égale à la somme des degrés entrants des sommets. En fait:

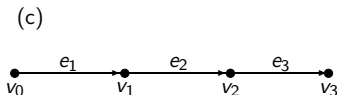
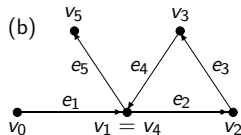
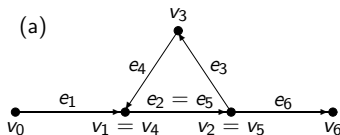
$$\sum_{v \in V} d^+(v) = |A| = \sum_{v \in V} d^-(v).$$

Démonstration

- 1 Calculer la somme des degrés sortants des sommets revient à compter les arcs sortants de chaque sommet et puis à ajouter ces nombres.
- 2 Chaque arc uv est compté exactement une fois dans la somme.

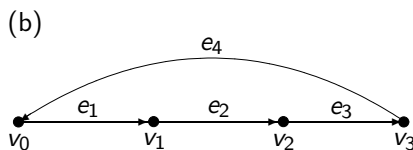
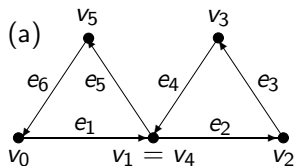
Définitions

- (a) **Chemin** : une suite alternée de sommets et d'arcs :
 $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i \leq k$.
- (b) Chemin **simple** : chemin tel que les arcs sont distincts.
- (c) Chemin **élémentaire** : chemin tel que les sommets sont distincts.



Définitions

- (a) **Circuit** : une séquence circulaire de sommets et d'arcs :
 $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et
 $e_k = v_{k-1} v_0$ sont des arcs distincts.
- (b) **Circuit élémentaire** : un circuit dont les sommets sont distincts.



Circuit élémentaire

Théorème

Si $d^+(v) \geq 1$ pour tout sommet v alors il existe un circuit élémentaire.

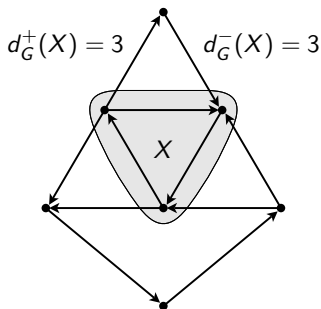
Démonstration

- On commence un parcours d'un sommet quelconque,
- quand on arrive à un sommet non-visité on peut en sortir, par la condition.
- quand on arrive à un sommet déjà visité on a un circuit élémentaire entre les deux apparitions de ce sommet.



Définitions

- **Degré sortant** $d_G^+(X)$ d'un ensemble X de sommets : nombre d'arcs dont extrémité initiale (resp. terminale) est dans X (resp. $V \setminus X$).
- **Degré entrant** $d_G^-(X)$ d'un ensemble X de sommets : nombre d'arcs dont extrémité initiale (resp. terminale) est dans $V \setminus X$ (resp. X).



Théorème

Soient s et t deux sommets d'un graphe orienté $G = (V, A)$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe un chemin de s à t .
- (b) Pour tout X tel que $s \in X \subseteq V \setminus t$, on a $d^+(X) \geq 1$.
- (c) Il existe un chemin élémentaire de s à t .

Algorithme de Marquage

ENTRÉE: Un graphe orienté $G = (V, A)$ et un sommet s de G .

SORTIE : S les sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin, et $F \subseteq A$ tel que (S, F) contient un (s, v) -chemin pour tout $v \in S$.

Étape 0: *Initialisation.*

$S := \{s\}$ et $F := \emptyset$.

Étape 1: *Marquage.*

Tant qu'il existe un arc uv de G tel que $u \in S, v \notin S$ faire :

$S := S \cup \{v\},$

$F := F \cup \{uv\},$

Étape 2: *Fin de l'algorithme.*

STOP.