

Exercice 3.1. — Donner tous les arbres à 3, 4, 5 sommets.

Exercice 3.2. — Montrer que si G est un arbre ayant au moins deux sommets, alors G admet un sommet de degré un. De plus, il en existe au moins deux.

Exercice 3.3. — Montrer que le nombre d'arêtes d'un arbre à n sommets est $n - 1$.

Exercice 3.4. — Quel est le nombre d'arêtes d'une forêt ayant n sommets et k composantes connexes ?

Exercice 3.5. — Est-il vrai qu'un graphe ayant n sommets et au moins n arêtes admet un cycle ?

Exercice 3.6. — Soit G un graphe ayant au moins 5 sommets. Montrer que l'un des deux graphes G ou $\overline{G}$ admet un cycle.

Exercice 3.7. — Montrer que si l'on enlève une arête d'un cycle d'un graphe connexe alors le graphe reste connexe.

Exercice 3.8. — Montrer qu'un graphe G admet un arbre couvrant si et seulement si G est connexe.

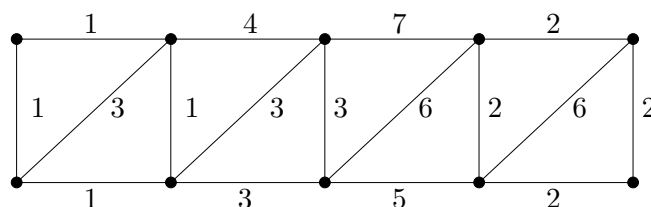
Exercice 3.9. — Montrer que tout graphe connexe G ayant au moins 2 sommets admet un sommet v tel que $G - v$ soit connexe.

Exercice 3.10. — Soit $F \subseteq E$ tel que le graphe partiel $G(F)$ est un arbre. Soit $e = uv \in E \setminus F$ et soit f une arête de la chaîne dans $G(F)$ entre u et v . Montrer que le graphe partiel $G(F + e - f)$ est un arbre.

ARBRES DE COÛT MINIMUM

Exercice 3.11. — l'algorithme de Kruskal : On suppose que le graphe G est connexe. Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ l'ordre de E tel que $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$. Au début soit $H_0 := (V, F_0)$ où $F_0 := \emptyset$. Pour $1 \leq i \leq m$ soit $H_i = (V, F_i)$ où $F_i = F_{i-1} + e_i$ si $H_{i-1} + e_i$ est une forêt, et $F_i = F_{i-1}$ sinon. Montrer que l'algorithme de Kruskal trouve un graphe partiel $H_m = (V, F_m)$ qui est un arbre de coût minimum.

(b) Exécuter l'algorithme de Kruskal sur le graphe suivant :



Exercice 3.12. — l'algorithme de Prim : On suppose que le graphe G est connexe. Au début soit $H_0 := (V_0, F_0)$ où $V_0 := r \in V$ et $F_0 := \emptyset$. Si $V_i \neq V(G)$ alors soit $uv \in \delta_G(V_i)$ tel que $u \in V_i$ de coût minimum et soit $V_{i+1} := V_i + v$ et $F_{i+1} := F_i + uv$. Montrer que l'algorithme de Prim trouve un graphe partiel $H_{n-1} = (V, F_{n-1})$ qui est un arbre de coût minimum.

(b) Exécuter l'algorithme de Prim sur le graphe ci-dessus.