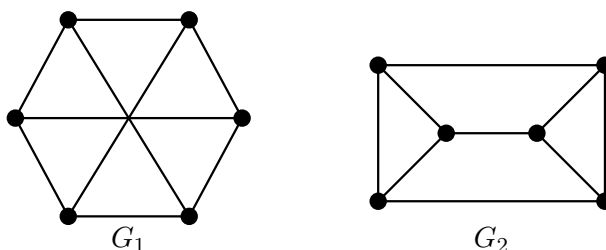


Exercice 4.1. — Cinq oeuvres 1, 2, 3, 4, 5 de cinq cinéastes célèbres A, B, C, D, E ont été primées à un célèbre festival. Voici le schéma de la participation des cinéastes à la réalisation de chaque film : $A = \{3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{3, 4, 5\}, D = \{2\}, E = \{1\}$. Chacun des 5 cinéastes peut remettre une fois le prix à l'équipe d'un film-lauréat à condition qu'il ne soit pas l'un des réalisateurs. Est-il possible de réaliser ainsi la remise de prix ?

Exercice 4.2. — $G = (V, E)$ est dit **biparti** s'il existe une partition de V en deux ensembles A et B telle que chaque arête de G relie un sommet de A à un sommet de B .

Montrer qu'un graphe G est biparti si et seulement si G ne contient pas de cycle impair.

Exercice 4.3. — Décider si les graphes de la figure sont bipartis.



Exercice 4.4. — Un **couplage** est un ensemble M d'arêtes deux-à-deux non-adjacentes. Un couplage M de G est **parfait** si chaque sommet de G est incident à une arête de M . Un ensemble T de sommets de G est **transversal** si $G - T$ contient aucune arête. Le nombre d'arêtes d'un couplage maximum est noté $\nu(G)$ et le nombre de sommets d'un ensemble transversal minimum est noté $\tau(G)$.

(a) Montrer que $\nu(G) \leq \tau(G)$.

(b) Vérifier que $\nu(K_3) < \tau(K_3)$.

Exercice 4.5. — **Théorème de Kőnig** : Si $G := (A, B; E)$ est un graphe biparti alors $\nu(G) = \tau(G)$.

Exercice 4.6. — **Théorème de Hall** : Soit $G := (A, B; E)$ un graphe biparti. Montrer que G admet un couplage parfait si et seulement si

(a) $|A| = |B|$, et

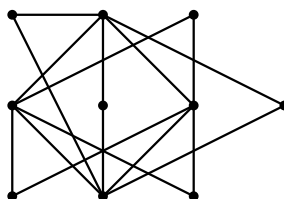
(b) $|\Gamma(X)| \geq |X|$ pour chaque $X \subseteq A$.

Exercice 4.7. — Soit G un graphe biparti k -régulier ($k \geq 1$.)

(a) Montrer que G admet un couplage parfait.

(b) Montrer que $E(G)$ se décompose en k couplages parfaits deux-à-deux arête-disjoints.

Exercice 4.8. — Trouver un couplage de cardinal maximum et un transversal de cardinal minimum dans le graphe biparti suivant :



Exercice 4.9. — **l'algorithme glouton** : Soit $G = (V, E)$ un graphe. Au début $M := \emptyset$. Tant qu'il existe une arête $e \in E \setminus M$ telle que $M + e$ est un couplage faire $M := M + e$. Montrer que l'algorithme glouton s'arrête avec un couplage M de cardinal au moins $\nu(G)/2$.