

Recherche Opérationnelle 1A

Théorie des graphes

Couplages dans les graphes bipartis

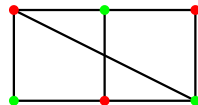
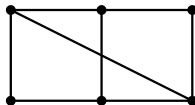
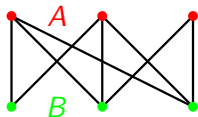
Zoltán Szigeti

Laboratoire G-SCOP
INP Grenoble, France

Graphes bipartis

Définition

Graphe **biparti** : s'il existe une partition de $V(G)$ en deux ensembles A et B telle que chaque arête de G relie un sommet de A à un sommet de B
 $\iff$ il existe une bonne coloration des sommets de G avec deux couleurs.



Notation

$(A, B; E)$: Graphe biparti où A et B sont les deux classes de couleurs et E est l'ensemble des arêtes.

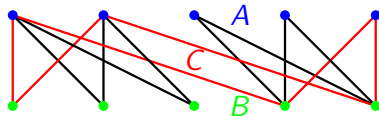
Caractérisation des graphes bipartis

Théorème 1

G est biparti $\iff G$ ne contient pas de cycle élémentaire impair.

Démonstration de nécessité

- 1 Supposons que G est biparti $(A, B; E)$.
- 2 Soit C un cycle élémentaire quelconque de G .
- 3 Chaque sommet de A est donc de degré 0 ou 2 dans C .
- 4 Toutes les arêtes de C sortent de A car G est biparti.
- 5 $|E(C)| = \sum_{v \in A} d_C(v) \equiv \sum_{v \in A} 0 = 0 \pmod{2}$,
- 6 il n'y a donc pas de cycle élémentaire impair.



Caractérisation des graphes bipartis

Démonstration de suffisance

- ❶ Supposons qu'il n'existe pas de cycle élémentaire impair.
- ❷ Contractons un nombre maximum de paires de sommets sans créer un cycle élémentaire impair, on obtient ainsi G' .
- ❸ G' est connexe sinon en contractant deux sommets de composantes connexes distinctes on ne crée pas de cycle élémentaire, contradiction.
- ❹ Si $|V(G')| = 1$, alors G n'avait pas d'arêtes et G est ainsi biparti.
- ❺ Si $V(G') = \{r, b\}$, alors les arêtes de G sont entre r et b dans G' . La coloration qui colorie rouge/bleu les sommets contractés dans r/b est bonne.
- ❻ Sinon, il existe dans G' deux arêtes uv et vw telles que $u \neq w$.
 - ❶ En contractant la paire u, w on obtient G'' .
 - ❷ D'après notre hypothèse, G'' contient un cycle élémentaire impair C'' .
 - ❸ Si C'' reste un cycle dans G' alors $C := C'$ sinon $C := C' + uv + vw$.
 - ❹ C est un cycle élémentaire impair dans G' qui est une contradiction.

Algorithme de reconnaissance des graphes bipartis

ENTRÉE : $G = (V, E)$ graphe connexe.

SORTIE : Une bonne coloration des sommets de G avec deux couleurs ou un cycle élémentaire impair.

Etape 0. *Initialisation.* Choisir un sommet s de V , $A := \{s\}$, $B := \emptyset$.

Etape 1. *Marquage.*

Tant qu'il existe $u \in A \cup B$, $v \notin A \cup B$, $uv \in E$ faire :
 $B := B \cup \{v\}$ si $u \in A$ et $A := A \cup \{v\}$ si $u \in B$; $p(v) := u$.

Etape 2. *Coloration.*

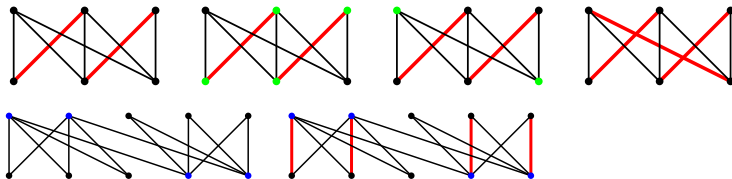
Si A et B sont stables alors arrêter avec la coloration A et B .

Etape 3. *Cycle élémentaire impair.*

S'il existe $x_1 x_2 \in E$ tq x_1 et x_2 sont de même couleur alors faire :
Soit P_i la (s, x_i) -chaîne obtenue en utilisant $p(\cdot)$ ($i = 1, 2$).
Soit t le dernier sommet en commun de P_1 et P_2 à partir de s .
Arrêter avec le cycle élémentaire impair $P_1[x_1, t] + P_2[t, x_2] + x_2 x_1$.

Définition

- 1 **Couplage** de G : $M \subseteq E(G)$ deux-à-deux non-adjacentes.
- 2 Sommet **M -saturé** : s'il existe une arête de M incidente au sommet.
- 3 Sommet **M -insaturé** : s'il n'y a pas d'arête de M incidente au sommet.
- 4 **Couplage parfait** de G : couplage M sans sommet M -insaturé.
- 5 **Transversal** de G : $T \subseteq V(G)$ tel que $G - T$ contient aucune arête.
- 6 $\nu(G)$: le nombre maximum d'arêtes d'un couplage de G .
- 7 $\tau(G)$: le nombre minimum de sommets d'un transversal de G .



Relation entre $\nu(G)$ et $\tau(G)$

Lemme 1

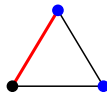
Pour tout graphe G , $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Démonstration

- 1 Soient M un couplage maximum et T un transversal minimum de G .
- 2 Puisque T est un transversal, T contient au moins une extrémité de chaque arête e de M , disons v_e .
- 3 Comme M est un couplage, $v_e \neq v_f$ si $e, f \in M$ et $e \neq f$.
- 4 $|M| = |\{v_e \in T : e \in M\}| \leq |T|$.
- 5 $\nu(G) = |M| \leq |T| = \tau(G)$.

Exemple

$$\nu(K_3) = 1 < 2 = \tau(K_3).$$

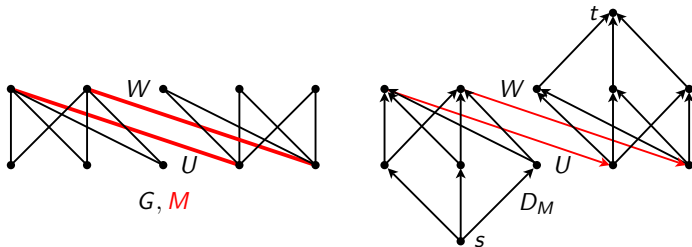


Construction d'un graphe orienté auxiliaire

Définition

Étant donné un graphe biparti $G = (U, W; E)$ et un couplage M de G , on construit un graphe orienté $D_M = (V, A)$ de la façon suivante:

- 1 $V := U \cup W \cup \{s, t\}$,
- 2 $A := \{su : u \text{ } M\text{-insaturé in } U\} \cup \{wt : w \text{ } M\text{-insaturé in } W\} \cup \{wu : uw \in M\} \cup \{uw : uw \in E \setminus M\}$.



Théorème 2

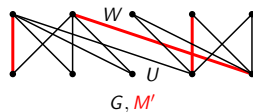
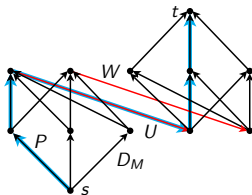
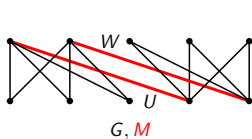
Étant donné un graphe biparti $G = (U, W; E)$ et un couplage M de G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\nu(G) = |M|$,
- 2 il n'existe pas de (s, t) -chemin dans D_M ,
- 3 $\tau(G) \leq |M|$.

Caractérisation d'un couplage de cardinal maximum

Démonstration de (1) $\implies$ (2) : $\nu(G) = |M| \implies$ pas de (s, t) -chemin

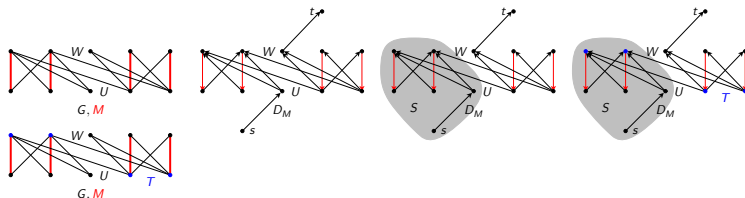
- 1 On suppose par l'absurde qu'il existe un (s, t) -chemin P dans D_M .
- 2 Soit $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P - s - t) \setminus M)$.
- 3 M' est un **couplage** et $|M'| = |M| + 1$.
- 4 M n'est donc pas de cardinal maximum, contradiction.



Caractérisation d'un couplage de cardinal maximum

Démonstration de (2) $\implies$ (3) : pas de (s, t) -chemin $\implies \tau(G) \leq |M|$

- 1 On suppose qu'il n'existe pas de (s, t) -chemin dans D_M .
- 2 Soit S l'ensemble des sommets atteignables depuis s dans D_M .
- 3 Soit $T = (U \setminus S) \cup (W \cap S)$.
- 4 Puisque qu'il n'y a pas d'arc sortant de S dans D_M , T est un transversal de G et $|T| \leq |M|$.
- 5 $\tau(G) \leq |T| \leq |M|$.



Caractérisation d'un couplage de cardinal maximum

Démonstration de $(3) \implies (1) : \tau(G) \leq |M| \implies \nu(G) = |M|$

- ❶ On suppose que $\tau(G) \leq |M|$.
- ❷ Puisque M est un couplage, $|M| \leq \nu(G)$.
- ❸ Par Lemma 1, $\nu(G) \leq \tau(G)$.
- ❹ Par conséquent, on a égalité partout, en particulier : $|M| = \nu(G)$.

Théorème 3 (Kőnig)

Dans un graphe biparti G , $\nu(G) = \tau(G)$.

Algorithme couplage de cardinal maximum dans un graphe biparti

ENTRÉE : G graphe biparti.

SORTIE : Couplage M de G de cardinal maximum.

Etape 0. *Initialisation.*

$M := \emptyset$.

Etape 1. *Augmentation du couplage.*

Tant qu'il existe un (s, t) -chemin P dans D_M faire

$M := (M \setminus E(P)) \cup (E(P - s - t) \setminus M)$.

Etape 2. *Fin de l'algorithme.*

STOP.

Couplages parfaits dans un graphe biparti

Notation

Étant donné un graphe biparti $G = (U, W; E)$ et $X \subseteq U$,
 $\Gamma_G(X)$: l'ensemble des voisins de X .

Théorème 4 (Hall)

Un graphe biparti $G = (U, W; E)$ admet un couplage parfait $\iff$

- (a) $|U| = |W|$,
- (b) $|\Gamma_G(X)| \geq |X| \ \forall X \subseteq U$.

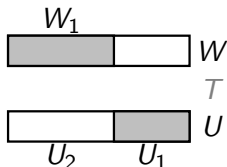
Démonstration de nécessité :

- ❶ Si G admet un couplage parfait M alors $\forall X \subseteq U, |\Gamma_M(X)| = |X|$.
- ❷ En particulier, $|U| = |\Gamma_M(U)| = |W|$ et ainsi (a) est satisfaite.
- ❸ Puisque $|\Gamma_G(X)| \geq |\Gamma_M(X)|$, (b) est donc satisfaite.

Couplages parfaits dans un graphe biparti

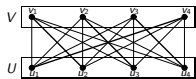
Démonstration de suffisance :

- 1 Par Théorème 3, $\exists$ couplage M et transversal T de G tq $|M| = |T|$.
- 2 $U_1 := T \cap U$, $W_1 := T \cap W$ et $U_2 := U - U_1$.
- 3 Comme T est un transversal, $\Gamma(U_2) \subseteq W_1$; et ainsi $|W_1| \geq |\Gamma(U_2)|$.
- 4 Par (b), $|\Gamma(U_2)| \geq |U_2|$ et par (a) $|U| = |W|$.
- 5 $|M| = |T| = |U_1 \cup W_1| = |U_1| + |W_1| \geq |U_1| + |U_2| = |U| = |W|$.
- 6 Les sommets de U et aussi ceux de W sont donc M -saturés.
- 7 Par conséquent, M est un couplage parfait.



D'autres résultats : algorithme pour trouver un couplage

- 1 de coût maximum dans un graphe biparti,
- 2 de cardinal maximum dans un graphe quelconque,
- 3 de coût maximum dans un graphe quelconque.



	u_1	u_2	u_3	u_4
v_1	3	2	1	1
v_2	9	4	1	5
v_3	8	5	2	3
v_4	7	8	4	8

