Abstract

Geometric intersection graphs are graphs arising from families of geometric objects in the plane (and, more generally, in $\mathbb{R}^d$). This class has captured the attention of many researchers because it is rich in theoretical issues and practical applications. In this manuscript, we restrict our attention to the combinatorial properties of rectangles, segments, and squares in the plane, axis-parallel or not. Many fundamental questions about these objects arose in the '60s. These works focused on the relation between the *hitting number* (minimum number of points necessary to hit all the objects in the family) and the *packing number* (maximum number of pairwise disjoint objects), and between the *chromatic number* (minimum number of colors such that all pairs of intersecting objects have distinct colors) and the *clique number* (maximum number of pairwise intersecting objects).

The first part of the thesis deals with Wegner's conjecture. This conjecture, proposed by Gerd Wegner in 1965, states that *for every family of axis-parallel rectangles in the plane, the hitting number of the family is smaller than twice its packing number.* We present the state of the art on this problem with several partial results, mainly focusing on particular cases, such as families with a triangle-free intersection graph and families with no crossing rectangles. Similarly, we also explore the problem of bounding the chromatic number in terms of the clique number. Then, we deal with the particular case of axis-parallel segments. We prove that not only the multiplicative constant in Wegner's conjecture is *valid* for this degenerate class of rectangles, but, surprisingly, it is also *tight*.

In the second part of the manuscript, we drop the axis-parallel assumption and study the combinatorial properties of rectangles that are not necessarily parallel to the axes. When the rectangles are also allowed to rotate, neither the hitting number nor the chromatic number can be bounded by the packing number or the clique number, respectively. For this reason, we restrict our attention to squares and rectangles with a *bounded aspect ratio*, where the aspect ratio of a rectangle is the ratio between its longer and shorter sides. The ratio between hitting and packing numbers and chromatic and clique numbers are wide open for natural objects such as disks and squares. For squares, we decrease these gaps by establishing linear bounds with reasonably small constants. Moreover, we generalize these results for rectangles with a bounded aspect ratio.

These questions lead to the subject of the *boxicity* of a graph, that is, the minimum dimension d such that the graph is the intersection graph of a family of axis-aligned boxes in $\mathbb{R}^d$. This parameter, introduced by Roberts in 1969, is well-studied for several graph classes, such as planar graphs, chordal graphs, and line graphs. In the third and final part of the thesis, we develop techniques to compute the boxicity of a graph based on the forbidden induced subgraphs of interval graphs and specific properties of interval orders. These techniques aim to explore the class of graphs having parameters of interest for the hitting and coloring conjectures discussed in the first part. Doing this, we prove that various of the

most popular graphs in *Graph Theory*, such as the Grötzsch graph, the Chvátal graph, the Petersen graph, and two of the smallest Ramsey graphs, are not the intersection graphs of axis-parallel rectangles in the plane, while they can be represented by axis-aligned boxes in $\mathbb{R}^3$. Our method also extends to higher dimensions and allows us to compute exactly the boxicity of the complement of the line graph of K_n for $n \geq 5$ (that corresponds to the Kneser graph $\mathrm{KG}(n, 2)$).

Résumé

Les graphes d'intersection géométriques sont des graphes qui proviennent de familles d'objets géométriques dans le plan (et, plus généralement, dans $\mathbb{R}^d$). Cette classe a attiré l'attention de nombreux chercheurs car elle est riche en questions théoriques et en applications pratiques. Dans ce manuscrit, nous nous limitons aux propriétés combinatoires des rectangles, segments et carrés dans le plan, parallèles aux axes ou non. De nombreuses questions fondamentales sur ces objets ont été soulevées dans les années 60. Ces travaux se sont concentrés sur la relation entre le *nombre transversal* (nombre minimum de points nécessaires pour intersecter tous les objets de la famille) et le *nombre de packing* (nombre maximum d'objets disjoint 2 à 2), ainsi qu'entre le *nombre chromatique* (nombre minimum de couleurs telles que toutes paires d'objects s'intersecant ont des couleurs distinctes) et le *nombre de clique* (nombre maximum d'objets que s'intersectant 2 à 2).

La première partie de la thèse traite de la célèbre conjecture de Wegner. Cette conjecture, proposée par Gerd Wegner en 1965, stipule que *pour toute famille de rectangles parallèles aux axes dans le plan, le nombre transversal de la famille est au plus deux fois son nombre de packing moins un.* Nous présentons l'état de l'art sur ce problème avec plusieurs résultats partiels, en nous concentrant principalement sur des cas particuliers, tels que les familles avec un graphe d'intersection sans triangle et les familles sans rectangles croisés. De même, nous explorons le problème de la borne du nombre chromatique en fonction du nombre de clique. Ensuite, nous traitons le cas particulier des segments parallèles aux axes. Nous prouvons que non seulement la constante de la conjecture de Wegner est *valide* pour cette classe dégénérée de rectangles, mais, qu'étonnamment, elle est aussi *optimale.*

Dans la deuxième partie du manuscrit, nous abandonnons l'hypothèse de parallélisme des axes et étudions les propriétés combinatoires des rectangles qui ne vérifient pas nécessairement cette propriété. Lorsque la rotation des rectangles est également autorisée, ni le nombre transversal ni le nombre chromatique ne peuvent être bornés respectivement par le nombre de packing ou le nombre de clique. Pour cette raison, nous portons notre attention sur les carrés et les rectangles dont le rapport de forme, c'est-à-dire le rapport entre la longueur de ses côtés les plus longs et les plus courts, est borné. Le rapport entre les nombres transversal et de packing ainsi que celui entre les nombres chromatique et de clique sont également des questions ouvertes pour les objets naturels tels que les disques et les carrés. Nous réduisons ces écarts en établissant des bornes linéaires avec des constantes raisonnablement petites pour les carrés et en généralisant ces résultats pour les rectangles dont le rapport de forme est borné.

Ces questions nous amènent à nous interroger sur la *boxicité* d'un graphe, c'est-à-dire la dimension minimale d telle que le graphe soit le graphe d'intersection d'une famille de boîtes alignées sur l'axe dans $\mathbb{R}^d$. Ce paramètre, introduit par Roberts en 1969, est bien étudié dans plusieurs classes de graphes, comme les graphes planaires, les graphes triangulés

et les line graphs. Dans la troisième et dernière partie de la thèse, nous développons des techniques pour calculer la boxicité d'un graphe en se basant sur les sous-graphes induits interdits des graphes d'intervalles et sur des propriétés spécifiques des ordres d'intervalles. Ces techniques visent à explorer la classe des graphes ayant des paramètres d'intérêt pour les conjectures de transversal et de coloration discutées dans la première partie. Ainsi, nous prouvons que certains des graphes parmi les plus célèbres en *Théorie des graphes*, tels que le graphe de Grötzsch, le graphe de Chvátal, le graphe de Petersen, et certains des plus petits graphes de Ramsey, ne sont pas des graphes d'intersection de rectangles parallèles aux axes dans le plan, alors qu'ils peuvent être représentés par des boîtes parallèles aux axes dans $\mathbb{R}^3$. Notre méthode s'étend également aux dimensions supérieures et nous permet de calculer exactement la boxicité du complément du line graph de K_n pour $n \geq 5$ (ce qui correspond au graphe de Kneser $\mathrm{KG}(n, 2)$).