Abstract

This thesis focuses on specific objects from graph theory called graph homomomorphisms, that is, mappings between the vertex sets that preserve adjacency. Graph homomorphism generalize graph colorings and connect Graph Theory with other areas, notably with Algebra. From the point of view of Theoretical Computer Science, computational problems related to graph homomorphisms have also raised remarkable interest, since they define a class of constraint satisfaction problems with a rich theory and many relevant examples in practice. This thesis investigates some problems related to the reconfiguration of graph homomorphisms. Informally, we adress the following problem: given two graphs G, H and two graph homomorphisms from G to H, is it possible to transform one homomorphism into the other by changing the image of a single vertex at a time, while keeping a homomorphism throughout. We also consider the related problem where it is asked if such transformations exist for any two homomorphisms from G to H. If this holds, the graph G is said to be H-mixing. More specifically, we are interested into the combinatorial complexity of the two above problems, the image graph H being fixed as a structure where homomorphisms map the instance graph G. As decision problems, adressing the first question is called "H-recoloring" and the second is called "H-mixing". This thesis deeply refines a topological machinery introduced by Marcin Wrochna in 2014 to solve H-recoloring in polynomial time when H is square-free. We show that the same machinery can work in the way more general setting where G and H are directed graphs or reflexive (have a loop on each vertex) or both. We thus generalize all previously known algorithmic results for H-recoloring, including for example the reconfiguration of homomorphisms to circular cliques. Then we consider the H-mixing problem, for which we also apply (loosely) Wrochna's machinery. We refine the topological tools and a gadget construction introduced by Hyobeen Kim, Jae-baek Lee and Mark H. Siggers to show hardness results about H-mixing when H is reflexive symmetric. That way, we are able to prove hardness results in a way more general setting where G and H can be irreflexive or directed –or both, including (again) the mixing of homomorphisms to circular clique, which was known to be hard only in very particular cases. All these results greatly extend the class of graphs and digraphs H for which the complexity of H-recoloring and H-mixing are known; they will hopefully be a significant step towards a full classification of the complexity of these problems.

Résumé en français

Cette thèse se concentre sur des objets particuliers en théorie des graphes appelés homomorphismes de graphes. ce sont des applications entre des ensembles de sommets qui préservent l'adjacence. S'ils ne sont pas aussi profondément étudiés que la coloration de graphe (qu'ils généralisent), les homomorphismes de graphes sont un outil classique de la combinatoire, reliant notamment profondément le domaine à l'algèbre. Du point de vue de l'informatique théorique, les problèmes de calcul liés aux homomorphismes de graphes présentent également un intérêt remarquable, car ils définissent une classe de problèmes de satisfaction de contraintes avec une théorie riche et de nombreux exemples pertinents dans la pratique. Cette thèse étudie quelques problèmes liés à la reconfiguration des homomorphismes de graphes. Sans trop formaliser, nous abordons le problème suivant : étant donné deux graphes G, H et deux homomorphismes de graphes de G vers H, est-il possible de transformer un homomorphisme en l'autre en changeant l'image d'un sommet à la fois, en gardant un homomorphisme tout au long du processus. Nous considérons également le problème voisin où nous demandons si de telles transformations existent pour deux homomorphismes quelconques de G vers H. Le cas échéant, on dit que le graphe G est H-mixant. Plus précisément, nous nous intéressons à la complexité combinatoire des deux problèmes ci-dessus, le graphe image H étant fixé comme une structure où les homomorphismes projettent le graphe instance G. En tant que problèmes de décision, la résolution de la première question est appelée "H-recoloration" et la seconde est appelée "H-mixing". Cette thèse affine profondément des outils topologiques introduit par Marcin Wrochna en 2014 pour résoudre la H-recoloration en temps polynomial lorsque H est sans carré. Nous montrons que les mêmes outils fonctionnent dans un cadre beaucoup plus général où G et H peuvent être des graphes dirigés ou être réflexifs (avoir une boucle sur chaque sommet) ou les deux. Nous généralisons ainsi tous les résultats positifs précédemment connus sur le problème, y compris, par exemple, la reconfiguration des homomorphismes vers des cliques circulaires. Nous nous tournons ensuite vers le problème du H-mixing, où nous faisons encore contribuer un peu la machinerie de M. Wrochna. Nous affinons les outils topologiques et une construction de gadget introduits par Hyobeen Kim, Jae-baek Lee et Mark H. Siggers pour montrer des résultats de dureté sur le mélange de H lorsque H est symétrique réflexif. Nous sommes ainsi en mesure de prouver des résultats de dureté dans un cadre beaucoup plus général où G et H peuvent être irréflexifs ou dirigés ou les deux; y compris (à nouveau) le mélange d'homomorphismes vers des cliques circulaires, dont la dureté n'était connue que dans des cas très particuliers. Tous ces résultats étendent considérablement la classe des graphes (et graphes dirigés) H pour lesquels la complexité du H-recoloriage et du H-mixing sont connues ; ils constitueront, nous l'espérons, une étape importante vers une classification complète de la complexité de ces problèmes.