

Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
TD : Connexité + Cycles + Marquage

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Énoncé

S'il existe une (x, y) -chaîne élémentaire P_{xy} et une (y, z) -chaîne élémentaire P_{yz} , alors il existe une (x, z) -chaîne élémentaire.

Énoncé

S'il existe une (x, y) -chaîne élémentaire P_{xy} et une (y, z) -chaîne élémentaire P_{yz} , alors il existe une (x, z) -chaîne élémentaire.

Démonstration

La concaténation de P_{xy} et P_{yz} est une (x, z) -chaîne qui contient une (x, z) -chaîne élémentaire, par EXO 2.1.

Énoncé

Soit G un graphe simple à $2n$ sommets tel que $d_G(v) \geq n \ \forall v \in V(G)$.
Montrer que G est connexe.

Énoncé

Soit G un graphe simple à $2n$ sommets tel que $d_G(v) \geq n \forall v \in V(G)$.
Montrer que G est connexe.

Démonstration

Supposons par l'absurde que G possède plus qu'une composante connexe.
Puisque $|V(G)| = 2n$, il existe une composante connexe G' de G telle que

$$|V(G')| \leq n.$$

Pour un sommet v de G' on a une contradiction :

$$n \leq d_G(v) = d_{G'}(v) \leq |V(G')| - 1 \leq n - 1.$$

Énoncé

Montrer qu'au moins l'un des deux graphes G ou $\overline{G}$ est connexe.

Énoncé

Montrer qu'au moins l'un des deux graphes G ou $\overline{G}$ est connexe.

Démonstration

Soient $G_1, \dots, G_\ell$ les composantes connexes de G .

- ❶ Si $\ell = 1$ alors G est connexe.
- ❷ Si $\ell \geq 2$ alors soient $u \in V(G_i)$ et $v \in V(G_j)$.
 - ❶ Si $i \neq j$ alors, dans $\overline{G}$, u et v sont reliés par la chaîne uv .
 - ❷ Si $i = j$, par $\ell \geq 2$, il existe $k \neq i$ et $w \in V(G_k)$. Alors, dans $\overline{G}$, les sommets u et v sont reliés par la chaîne $uw + wv$.
- ❸ $\overline{G}$ est donc connexe.



Exo 2.6 (a)

Énoncé

Soit $P = v_1 \dots v_\ell$ une plus longue chaîne élémentaire dans un graphe simple. Alors chaque voisin de v_1 se trouve dans $\{v_2, \dots, v_\ell\}$.

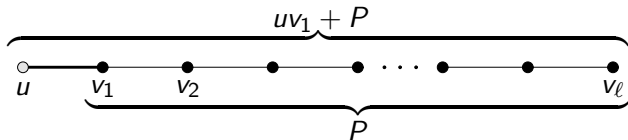
Exo 2.6 (a)

Énoncé

Soit $P = v_1 \dots v_\ell$ une plus longue chaîne élémentaire dans un graphe simple. Alors chaque voisin de v_1 se trouve dans $\{v_2, \dots, v_\ell\}$.

Démonstration

- 1 Supposons que v_1 possède un voisin $u \notin \{v_2, \dots, v_\ell\}$.
- 2 $uv_1 + P$ serait une chaîne élémentaire plus longue que P ,
- 3 contradiction.



Exo 2.6 (b)

Énoncé

Si tous les degrés des sommets d'un graphe simple G sont supérieurs ou égaux à deux, alors G possède un cycle élémentaire.

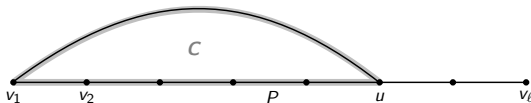
Exo 2.6 (b)

Énoncé

Si tous les degrés des sommets d'un graphe simple G sont supérieurs ou égaux à deux, alors G possède un cycle élémentaire.

Démonstration

- 1 Soit $P := v_1 v_2 \dots v_\ell$ une plus longue chaîne élémentaire de G .
- 2 Par $d(v_1) \geq 2$ et G simple, il existe une arête $v_1 u \neq v_1 v_2$.
- 3 Par EXO 2.6 (a), $u \in \{v_3, \dots, v_\ell\}$.
- 4 Donc $C = P[v_1, u] + uv_1$ est un cycle élémentaire.



Énoncé

Un graphe G sans sommet isolé contient une chaîne eulérienne $\iff$

- (a) G est connexe et
- (b) le nombre de sommets de degré impair est au plus 2.

Énoncé

Un graphe G sans sommet isolé contient une chaîne eulérienne $\iff$

- (a) G est connexe et
- (b) le nombre de sommets de degré impair est au plus 2.

Démonstration de la nécessité

- ❶ Si G contient une chaîne eulérienne P (avec extrémités u et v) alors
- ❷ $P + uv$ est un cycle eulérien de $G + uv$,
- ❸ on a les conditions, par EXO 2.7(a).

Démonstration de la suffisance

Par (a), G est connexe.

Par (b),

- ❶ soit il n'y a pas de sommet de degré impair : et par EXO 2.7(a),
 - G a un cycle eulérien,
 - qui est une chaîne eulérienne de G .
- ❷ soit il y a deux sommets u et v de degré impair : et par EXO 2.7(a),
 - $G + uv$ a un cycle eulérien C , et alors
 - $C - uv$ est une chaîne eulérienne de G .

Énoncé

Montrer que si $G - v$ n'est pas connexe alors G n'est pas hamiltonien.

Énoncé

Montrer que si $G - v$ n'est pas connexe alors G n'est pas hamiltonien.

Démonstration

Sinon, si C est un cycle hamiltonien de G , alors puisque C est un cycle élémentaire, $C - v$ est connexe, et donc $G - v$ est connexe, contradiction.

Énoncé

- 1 On a trois récipients dont les contenances sont respectivement de 8, 5 et 3 litres, le récipient de 8 litres est plein, les autres vides.
- 2 Les récipients ne sont pas gradués, c'est-à-dire qu'une opération de transvasement aura pour effet de vider complètement un des récipients et/ou d'en remplir un autre à ras bord.
- 3 Il s'agit, par une série de transvasements, isoler 4 litres dans chacun des deux premiers récipients.

Solution

- ❶ On introduit un graphe orienté $G = (V, A)$.
 - $V = \{(a, b, c) \text{ d'entiers qui correspondent aux remplissages possibles :}$
 - $a + b + c = 8,$
 - $0 \leq a \leq 8, 0 \leq b \leq 5, 0 \leq c \leq 3,$
 - l'un au moins parmi a, b et c est égal à une de ses bornes $\}$.
 - $A = \{tt' : \text{on peut passer de } t \text{ à } t' \text{ en réalisant un seul transvasement}\}.$
- ❷ On trouve un chemin dans G du sommet $(8, 0, 0)$ au sommet $(4, 4, 0)$ en exécutant l'algorithme de Marquage.

Application

