

Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
Arbres + arbre couvrant de coût minimum

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Énoncé

Donner tous les arbres à 3, 4, 5 sommets.

EXO 3.1

Énoncé

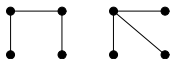
Donner tous les arbres à 3, 4, 5 sommets.

Solution

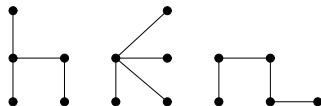
- (a) Il existe exactement 1 arbre non-isomorphe à 3 sommets.
- (b) Il existe exactement 2 arbres non-isomorphes à 4 sommets.
- (c) Il existe exactement 3 arbres non-isomorphes à 5 sommets.



(a)



(b)



(c)

Énoncé

Si G est un arbre ayant au moins deux sommets, alors G admet au moins deux sommets de degré un.

Énoncé

Si G est un arbre ayant au moins deux sommets, alors G admet au moins deux sommets de degré un.

Démonstration

- 1 Soit P une plus longue chaîne élémentaire de G .
- 2 Les deux extrémités de P sont distinctes car G est connexe et $n \geq 2$.
- 3 Chacun d'eux est de degré 1 dans G , sinon, d'après l'Exo 2.6(a), il aurait au moins deux voisins dans P et appartiendrait donc à un cycle, ce qui contredirait le fait que G est un arbre.

Énoncé

Quel est le nombre m d'arêtes d'une forêt F ayant n sommets et k composantes connexes $F_1, \dots, F_k$?

Énoncé

Quel est le nombre m d'arêtes d'une forêt F ayant n sommets et k composantes connexes $F_1, \dots, F_k$?

Démonstration

- ① Soient $n_i = |V(F_i)|$, $m_i = |E(F_i)|$ $i = 1, \dots, k$.
- ② Chaque F_i est un arbre, donc par l'Exo 3.3, $m_i = n_i - 1$,
- ③ $m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k$.

Énoncé

Est-il vrai qu'un graphe ayant n sommets et $m \geq n$ arêtes admet un cycle?

Énoncé

Est-il vrai qu'un graphe ayant n sommets et $m \geq n$ arêtes admet un cycle?

Démonstration

- 1 Sinon G est une forêt.
- 2 Soit $k \geq 1$ le nombre de composantes connexes de G .
- 3 D'après l'Exo 3.4, on a $n \leq m = n - k < n$, une contradiction.

Énoncé

Si un graphe G a $n \geq 5$ sommets alors G ou $\overline{G}$ admet un cycle.

Énoncé

Si un graphe G a $n \geq 5$ sommets alors G ou $\overline{G}$ admet un cycle.

Démonstration

- ❶ Supposons que G et $\overline{G}$ ne contiennent pas de cycle.
- ❷ Par l'Exo 1.1(c) et l'Exo 3.4,
$$\frac{n(n-1)}{2} = |E(K_n)| = |E(G)| + |E(\overline{G})| \leq 2(n-1).$$
- ❸ c'est-à-dire $n \leq 4$, ce qui contredit notre hypothèse sur n .

Énoncé

Tout graphe connexe G à $n \geq 2$ sommets admet un sommet v tel que $G - v$ soit connexe.

Énoncé

Tout graphe connexe G à $n \geq 2$ sommets admet un sommet v tel que $G - v$ soit connexe.

Démonstration

- ❶ G est connexe, donc, par l'Exo 3.8, G contient un arbre couvrant F .
- ❷ Par Lemme 2, F a un sommet v de degré 1 et $F - v$ est un arbre.
- ❸ Or $F - v$ est un graphe partiel de $G - v$ et donc, par l'Exo 3.8, $G - v$ est connexe.

Énoncé

- Soient $G(F)$ un arbre, $e = uv \in E(G) \setminus F$ et f une arête de la (u, v) -chaîne P dans $G(F)$.
- Alors le graphe partiel $G(F + e - f)$ est un arbre.

Énoncé

- Soient $G(F)$ un arbre, $e = uv \in E(G) \setminus F$ et f une arête de la (u, v) -chaîne P dans $G(F)$.
- Alors le graphe partiel $G(F + e - f)$ est un arbre.

Démonstration

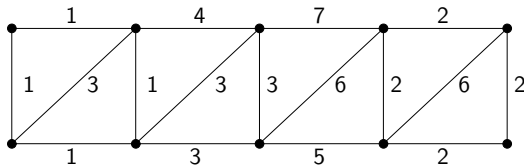
- 1 $C = P + uv$ est un cycle dans $G(F + e)$.
- 2 Par Lemme 1, $G(F')$ est connexe où $F' = F + e - f$.
- 3 Par l'Exo 3.8, $G(F')$ contient un arbre couvrant $G(F'')$. Puisque $n - 1 = |F| = |F'| \geq |F''| \geq n - 1$, on a $F' = F''$.
- 4 Par conséquent, $G(F')$ est un arbre.

Énoncé: l'algorithme de Kruskal

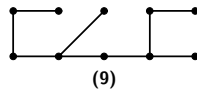
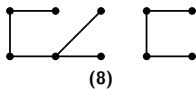
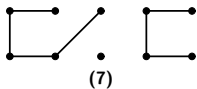
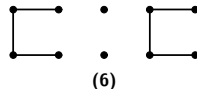
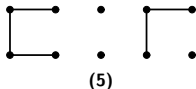
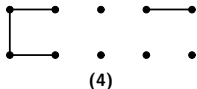
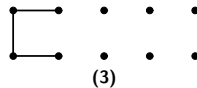
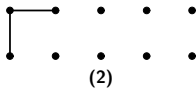
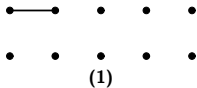
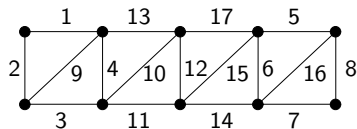
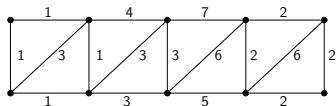
On suppose que le graphe $G = (V, E)$ est connexe.

- Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ l'ordre de E tel que $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$.
- Au début soit $H_0 = (V, F_0)$ où $F_0 = \emptyset$.
- Pour $1 \leq i \leq m$ soit $H_i = (V, F_i)$ où $F_i = F_{i-1} + e_i$ si $H_{i-1} + e_i$ est une forêt, et $F_i = F_{i-1}$ sinon.

(b) Exécuter l'algorithme de Kruskal sur le graphe suivant:



EXO 3.11

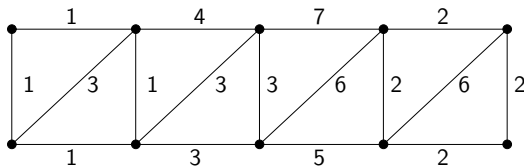


Énoncé: l'algorithme de Prim

On suppose que le graphe $G = (V, E)$ est connexe.

- Au début soit $H_0 := (V_0, F_0)$ où $V_0 := r \in V$ et $F_0 := \emptyset$.
- Si $V_i \neq V(G)$ alors soit $uv \in \delta_G(V_i)$ tel que $u \in V_i$ de coût minimum et soit $V_{i+1} := V_i + v$ et $F_{i+1} := F_i + uv$.

(b) Exécuter l'algorithme de Prim sur le graphe suivant:



EXO 3.12

