

Recherche Opérationnelle 1A
Premier cours
Début de la théorie des graphes

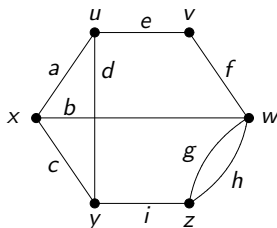
Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Définitions

Graphe $G = (V, E)$

- **sommets** : $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}, n \geq 1$.
- **arêtes** : $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$, une arête est une paire de sommets.
- **extrémités** : pour $e_i = v_j v_k$, v_j et v_k sont les extrémités de e_i .
- **boucle** : une arête dont les extrémités coïncident.
- **arête multiple** : s'il existe une autre arête avec les mêmes extrémités.
- **simple** : sans boucle et sans arête multiple.



• sommet

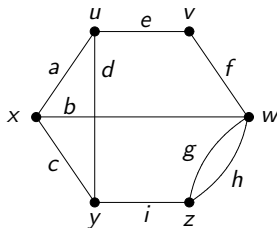
— arête

$$V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

Définitions

- 1 **incident** : une arête e est incidente à chacune de ses extrémités.
- 2 sommets **adjacents, voisins, connectés** : u et v si $uv \in E(G)$.
- 3 arêtes **adjacentes** : deux arêtes ayant ≥ 1 extrémité en commun.
- 4 **degré** $d_G(v)$ d'un sommet v : le nombre d'arêtes incidentes à v .



• sommet

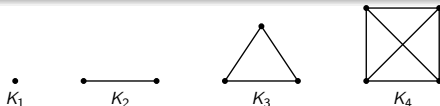
— arête

$$V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

Définitions

- ① **incident** : une arête e est incidente à chacune des ses extrémités.
- ② sommets **adjacents, reliés, connectés** : u et v si $uv \in E(G)$.
- ③ arêtes **adjacentes** : deux arêtes ayant ≥ 1 extrémité en commun.
- ④ **degré** $d_G(v)$ d'un sommet v : le nombre d'arêtes incidentes à v .
- ⑤ **graphe complet** K_n : graphe simple à n sommets ayant toutes les arêtes possibles.



Remarque

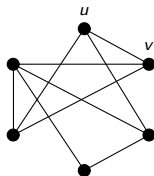
Pour tout sommet v d'un graphe simple à n sommets on a

$$0 \leq d(v) \leq n - 1.$$

Théorème

La somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \times |E|.$$



Démonstration

- 1 Calculer la somme des degrés des sommets de G revient à compter les arêtes incidentes à chaque sommet et puis à ajouter ces nombres.
- 2 Chaque arête uv est comptée exactement deux fois dans la somme : une fois dans $d_G(u)$ et une autre fois dans $d_G(v)$.

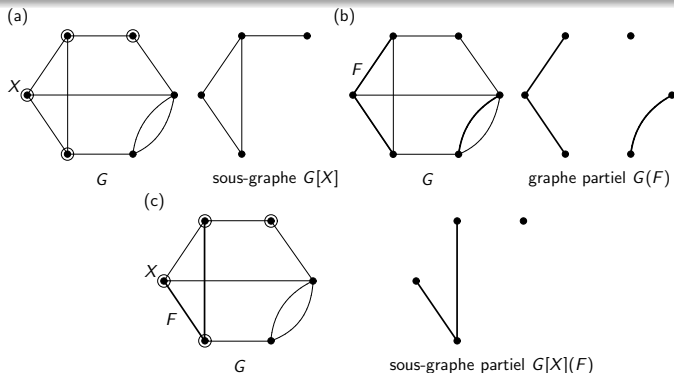
Sous-graphe, graphe partiel

Soient $G = (V, E)$ un graphe, $X \subseteq V$ et $F \subseteq E$.

(a) **Sous-graphe** de G induit par X : $G[X] = (X, \{uv \in E : u, v \in X\})$.

(b) **Graphe partiel** de G induit par F : $G(F) = (V, F)$.

(c) **Sous-graphe partiel** de G induit par X et F : $G[X](F) = (X, F)$.



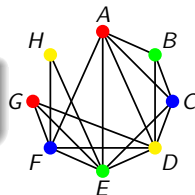
Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

- ❶ Une coloration est **bonne** si
 - deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur, $\iff$
 - les sommets de même couleur forment un **stable** : pas d'arêtes dedans.
- ❷ $\chi(G)$ = nombre min. de couleurs dans une bonne coloration de G .
 - $\chi(G)$ existe et $\leq n = |V(G)|$ car chaque sommet peut être colorié par une couleur différente.

Remarque

Calculer $\chi(G)$ est un problème difficile.



Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G , de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

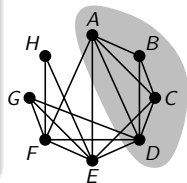
Démonstration

- 1 Récurrence sur $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.
- 2 Supposons que ce soit vrai pour tout graphe simple ayant n sommets.
- 3 Soient G un graphe simple à $n + 1$ sommets et $v \in V(G)$.
- 4 $G - v$ est simple, $|V(G - v)| = n$ et $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$.
- 5 En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une bonne coloration de $G - v$ avec $\leq \Delta(G - v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ couleurs.
- 6 Puisque $d_G(v) \leq \Delta(G)$, cette coloration utilise $\leq \Delta(G)$ couleurs pour les voisins de v , il reste donc au moins une couleur disponible pour v .
- 7 En coloriant v avec cette couleur on obtient une bonne coloration de G avec $\leq \Delta(G) + 1$ couleurs.

Coloration : une borne inférieure

Définitions

- 1 **Clique** : sous-graphe qui est complet.
- 2 $\omega(G)$ = le nombre maximum de sommets dans une clique de G .
 - $\omega(G)$ existe et ≥ 1 , car un sommet est une clique,
 - $\omega(G) \geq 2$; s'il existe une arête car elle est une clique.



Remarque

Dans une bonne coloration, chaque sommet d'une clique doit être colorié par une couleur différente, donc on a :

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Exemple

$$\chi(C_5) = 3 > 2 = \omega(C_5).$$

