

Examen Recherche Opérationnelle

Octobre 2026

Vous avez le droit de faire appel à des algorithmes ou des théorèmes/lemmes vus en cours.

1 Exercice 1 (4 points)

Proposez un algorithme récursif qui compte le nombre de $(s - t)$ chaînes sur un graphe simple $G = (\{s, t\} \cup V, E)$.

2 Exercice 2 (6 points)

Étant donné un graphe simple $G = (V, E)$, une *fair* coloration est une fonction $f : V \rightarrow \mathbf{N}$, telle que pour tout sommet $v \in V$, si $f(v) = i$ alors $|\{u \in V \mid u \in N_G(v) \text{ et } f(u) = i\}| \leq 1$. C'est-à-dire, un sommet $v \in V$ peut avoir la même couleur qu'au plus un de ses voisins. Notons $\chi_1(G)$ le plus petit nombre de couleurs utilisé par une *fair* coloration sur un graphe G .

- Donnez une borne inférieure à $\chi_1(G)$ en fonction de $\omega(G)$ (la taille de la clique maximale de G). *Vous n'avez pas à le démontrer formellement.*
- Montrez par récurrence sur le nombre de sommets que $\chi_1(G) \leq \Delta(G)$.

3 Exercice 3 (3 points)

Exécutez l'algorithme de Kruskal sur le graphe représenté sur la Figure 1. Vous devez donner l'ordre dans lequel les arêtes sont ajoutées par l'algorithme au résultat final.

4 Exercice 4 (3 points)

Nous avons un ensemble de machines qui peuvent effectuer des tâches, mais ne peuvent effectuer qu'une seule tâche par jour. Nous avons un ensemble de tâches à effectuer **aujourd'hui**. Soit $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ l'ensemble de machines et $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ l'ensemble de tâches. Chaque tâche ne peut être effectuée que

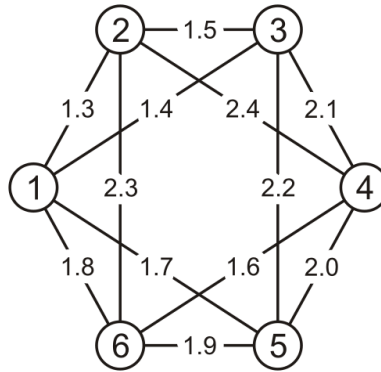


Figure 1: Exemple de graphe $G = (V, E)$.

par **certaines machines**. Voici l'ensemble de machines qui peuvent effectuer chaque tâche:

- Tâche 1: peut uniquement être effectuée par la machine 5.
- Tâche 2: peut être effectuée par les machines 1 et 3.
- Tâche 3: peut uniquement être effectuée par la machine 4.
- Tâche 4: peut être effectuée par les machines 4 et 5.
- Tâche 5: peut être effectuée par les machines 2 et 5.

Modélisez ce problème par un problème de graphes. Peut-on effectuer toutes les tâches sur une même journée ? Sinon, quel est le plus grand nombre de tâches que l'on peut effectuer ? Montrez formellement votre résultat.

5 Exercice 5 (4 points)

- Combien d'arbres couvrants distincts y-a-t'il sur un cycle élémentaire à n sommets (C_n) ?
- Soit C_n^w un cycle élémentaire d'ordre n **pondéré**, tel que $w(e)$ est le coût d'une arête $e \in E(C_n)$. Proposez un algorithme qui renvoie un arbre couvrant de coût minimal optimisé pour ce type de graphe (**sans utiliser l'algorithme de Kruskal**).