

Examen Recherche Opérationnelle

Octobre 2026

Vous avez le droit de faire appel à des algorithmes ou des théorèmes/lemmes vus en cours.

1 Exercice 1 (4 points)

Étant donné un graphe simple $G = (V, E)$, une *fair* coloration est une fonction $f : V \rightarrow \mathbf{N}$, telle que pour tout sommet $v \in V$, si $f(v) = i$ alors $|\{u \in V | u \in N_G(v) \text{ et } f(u) = i\}| \leq 1$. C'est-à-dire, un sommet $v \in V$ peut avoir la même couleur qu'au plus un de ses voisins.

Proposez un algorithme glouton qui construit une *fair* coloration.

2 Exercice 2 (5 points)

Soit V un ensemble de villes. Nous souhaitons construire un réseau ferroviaire permettant de relier toutes les villes dans V , tout en minimisant le coût de construction de voies ferrées. À cause de la forme du terrain, certaines liaisons directes sont impossibles. Soit $E \subseteq V \times V$ l'ensemble d'arêtes représentant les liaisons possibles. Le prix de construction d'une liaison directe sur une arête dans E est donné par la fonction de coût $c : E \rightarrow \mathbf{R}_+$. Le graphe pondéré $G = (V, E, c)$ est donné sur la Figure 1.

À quel problème de théorie de graphe ce problème correspond-il ? Proposez le réseau minimisant le coût d'installation des voies, en montrant la trace d'exécution de l'algorithme utilisé.

3 Exercice 3 (5 points)

Donnez un couplage maximum sur le graphe donné en Figure 2. Vous devez montrer la trace d'exécution de l'algorithme utilisé.

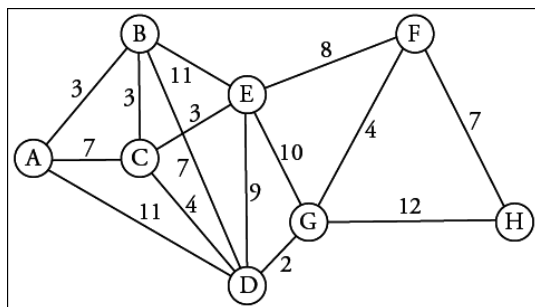


Figure 1: Graphe pondéré $G = (V, E, c)$.

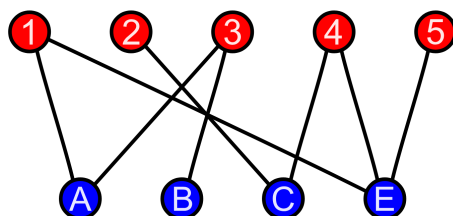


Figure 2: Graphe biparti.

4 Exercice 4 (5 points)

- Revenons sur la Figure 1. Dessinez le sous-graphe induit par les sommets $V' = \{A, B, C, D, E\}$.
- Donnez la distance du chemin le plus court entre le sommet A et tous les autres sommets de ce sous-graphe en montrant la trace d'exécution de l'algorithme utilisé.

5 Exercice 5 (4 points)

Un hypergraphe 3-uniforme simple est un couple $G = (V, H)$, où $H \subseteq V \times V \times V$, et où $h = (u, v, w) \in H$, avec $u \neq v$, $v \neq w$ et $w \neq u$, est une **hyperarête**. C'est-à-dire qu'une arête n'est pas composée de 2 mais de 3 sommets (distincts). Le degré d'un sommet v , noté $d_G(v)$, est le nombre d'hyperarêtes contenant le sommet v , dans l'hypergraphe $G = (V, H)$. Montrez que $\sum_{v \in V} d_G(v) = 3 \cdot |H|$.