

## SUJET DE THESE G-SCOP 2025

**Titre de la thèse** : Fonctions de profondeur et méthodes de vote; vers une approche unificatrice

**Directeur(s) de thèse** : Irène Gannaz (G-SCOP, Grenoble INP)

**Co-directeur de thèse** : Jean-Baptiste Aubin (ICJ, INSA de Lyon)

**Co-encadrant(s)** : Antoine Rolland (ERIC, Univ. Lyon 2)

**Ecole doctorale** : MSTII

**Date de début** (souhaitée) : A partir du 01/10/2025

**Financements envisagés – Contexte – Partenaires éventuels** : Projet ANR CONDORCET (CONsolider la DémOcRatie : Choisir une méthode Électorale Transparente)

### **Description du sujet :**

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet CONDORCET, qui vise à renouveler l'analyse des règles de vote en s'appuyant sur des outils mathématiques robustes et interprétables. Elle explore l'écriture des modes de vote comme résultat d'un problème d'optimisation. Basé sur des fonctions de profondeur statistique, cette approche permet de définir, analyser et comparer les méthodes de vote.

L'objectif de ce travail est de formuler les procédures de vote comme des problèmes d'optimisation, dans lesquels le résultat d'une élection correspond à la maximisation d'une fonction d'intérêt. Dans Aubin et al. (2022), le résultat d'un vote est interprété comme le choix d'un électeur central, éventuellement fictif, représentant un consensus. Cette approche implique alors de définir rigoureusement la notion de centralité. C'est dans ce cadre que les fonctions de profondeur (voir Zuo et Serfling, 2000) constituent un outil particulièrement pertinent. Issues de la statistique multivariée, ces fonctions permettent de quantifier la centralité d'un point par rapport à une distribution de données. Transposées au contexte électoral, elles fournissent un cadre unificateur : le vainqueur d'une élection peut être vu comme le candidat (ou l'option) qui maximise une fonction de profondeur définie sur l'ensemble des préférences exprimées par les électeurs. Ainsi, chaque procédure de vote peut être associée à une fonction de profondeur particulière, et reformulée comme la solution d'un problème d'optimisation fondé sur cette fonction.

L'écriture de procédures de votes comme résultat de fonctions de profondeur a été proposée par Aubin et al. (2022) dans le cadre de votes par évaluations. Dans ce contexte, les votants ne donnent pas d'ordre sur les alternatives, mais donnent une note (évaluation). Un premier axe de recherche est alors d'étudier le lien entre les propriétés des profondeurs et des modes de scrutin. Notamment, les fonctions de profondeur sont associées à des notions de robustesse, c'est-à-dire de sensibilité aux observations extrêmes, voir Liu et al. (2017). Dédire de ces propriétés des indicateurs de sensibilité aux votes extrêmes des procédures de votes est une perspective que nous souhaiterions explorer.

Cette association entre fonctions de profondeur et méthodes de votes peut permettre également de proposer de nouveaux modes de scrutin. Parmi les fonctions de profondeur que nous souhaiterions étudier, nous pouvons citer notamment celle de Monge-Kantorovich basée sur le transport optimal. Introduite par Chernozhulov et al. (2017), elle est associée, comme toute fonction de profondeur, à un mode de scrutin dont nous aimerions étudier les propriétés.

La majorité des procédures de vote reposent sur des classements des alternatives. Nous renvoyons à Aubin et Rolland (2022) ou à Felsenthal et Nurmi (2018) pour une vision globale des méthodes de vote usuelles. Il est donc nécessaire pour transposer les travaux précédents dans ce contexte, de considérer des fonctions de profondeurs définies sur des ordres ou des permutations (voir à ce propos les travaux de Goibert et al (2022)). Un deuxième axe de recherche est l'analyse des modes de scrutin utilisant des classements grâce aux fonctions de profondeur, et ainsi d'écrire ces modes de scrutin comme solutions de problèmes d'optimisation. Par exemple, un objectif est d'identifier la profondeur associée à des modes de scrutin usuel, tels Borda, Condorcet, le scrutin majoritaire à un ou deux tours... De même il est envisageable de proposer de nouvelles procédures à partir de fonctions de profondeur. L'étude des propriétés des fonctions de profondeurs peut permettre de caractériser les modes de scrutin.

## **Bibliographie**

Aubin, J-B., Gannaz, I., Leoni S. and Rolland A. (2022), "Deepest voting: A new way of electing," Mathematical Social Sciences, Volume 116, Pages 1-16

Aubin, J-B. and Rolland A. (2022), "Comment être élu à tous les coups", EDP Sciences, collection SFdS/ le monde des données

Chernozhukov V., Galichon, A., Hallin, M. and Henry, M. (2017), Monge--Kantorovich depth, quantiles, ranks and signs, The Annals of Statistics, 1, pp. 223 -- 256, 45

Felsenthal, D. S. and Nurmi, H. (2018) Voting Procedures for Electing a Single Candidate: Proving Their (In)Vulnerability to Various Voting Paradoxes, SpringerBriefs in Economics

Goibert, M., Cléménçon, S., Irurozki, E. and Mozharovskyi, P. (2022) Statistical depth functions for ranking distributions: Definitions, statistical learning and applications. In G. Camps-Valls, F. J. R. Ruiz, and I. Valera, editors, International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, AISTATS 2022, 28-30, March 2022, Virtual Event, volume 151 of Proceedings of Machine Learning Research, pages 10376–10406

Liu, X., Zuo, Y. et Wang, Q. (2017) Finite sample breakdown point of Tukey's halfspace median. Sci. China Math. 60, pp. 861-874

Zuo, Y. and Serfling, R. (2000) General notions of statistical depth function. Annals of statistics, pages 461–482

**Contact(s)** : [irene.gannaz@grenoble-inp.fr](mailto:irene.gannaz@grenoble-inp.fr), [jean-baptiste.aubin@insa-lyon.fr](mailto:jean-baptiste.aubin@insa-lyon.fr), [antoine.rolland@univ-lyon2.fr](mailto:antoine.rolland@univ-lyon2.fr)