

Recherche Opérationnelle 1A

Théorie des graphes

Couplages dans les graphes bipartis

Zoltán Szigeti

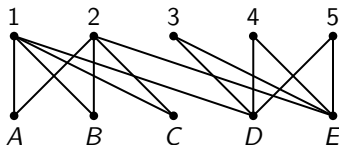
Ensimag, G-SCOP

Énoncé

- Cinq oeuvres 1, 2, 3, 4, 5 de cinq cinéastes célèbres A, B, C, D, E ont été primées à un célèbre festival.
- Voici le schéma de la participation des cinéastes à la réalisation de chaque film:
 $A = \{3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{3, 4, 5\}, D = \{2\}, E = \{1\}.$
- Chacun des 5 cinéastes peut remettre une fois le prix à l'équipe d'un film-lauréat à condition qu'il ne soit pas l'un des réalisateurs.
- Est-il possible de réaliser ainsi la remise de prix ?

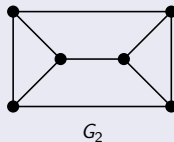
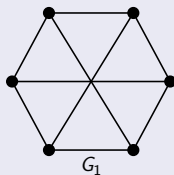
Solution

- ① On introduit un graphe biparti G dont
 - ① les deux classes de couleurs : $\{A, B, C, D, E\}$ et $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 - ② l'ensemble des arêtes : cinéaste X est relié à l'oeuvre Y si X n'est pas réalisateur de Y .
- ② Il s'agit de trouver un ensemble M d'arêtes tel que chaque sommet est incident à exactement une arête de M :
 - ① chaque oeuvre doit obtenir un prix et
 - ② chaque cinéaste doit donner un prix.
- ③ On ne peut pas réaliser la remise de prix car les trois cinéastes A, B, C peuvent donner le prix à seulement deux oeuvres 1, 2.



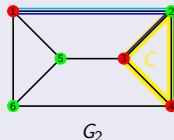
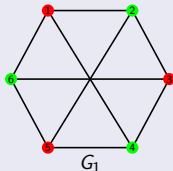
Énoncé

Décider si les graphes de la figure sont bipartis.



Solution

G_1 est biparti, voire la figure pour une bonne coloration avec deux couleurs.
 G_2 n'est pas biparti, voire la figure pour un cycle élémentaire impair.



Énoncé

Soit G un graphe biparti k -régulier ($k \geq 1$).

- (a) Montrer que G admet un couplage parfait.
- (b) Montrer que $E(G)$ se décompose en k couplages parfaits deux-à-deux arête-disjoints.

Solution de (a) :

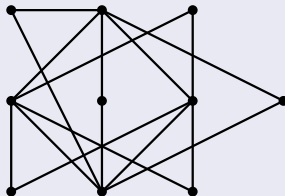
- ① D'après l'EXO 4.6 il faut vérifier que les deux conditions (a) et (b) du Théorème de Hall sont satisfaites. Pour tout $X \subseteq A$,
- ② $k|X| = \sum_{u \in X} d(u) = |E(G[X \cup \Gamma(X)])| \leq \sum_{v \in \Gamma(X)} d(v) = k|\Gamma(X)|$,
- ③ donc (b) est satisfaite. En particulier, $|A| \leq |B|$.
- ④ De même façon, $|B| \leq |A|$, donc (a) est satisfaite.

Solution de (b) :

- ❶ Par récurrence sur k .
- ❷ Si $k = 1$ alors E lui même est un couplage parfait.
- ❸ On suppose que c'est vrai pour $k - 1$.
- ❹ Soit G un graphe biparti k -régulier.
- ❺ Par l'EXO 4.7(a), G admet un couplage parfait M_k .
- ❻ $G' := G - M_k$ est un graphe biparti $(k - 1)$ -régulier.
- ❼ En vertu de l'hypothèse de récurrence $E(G')$ se décompose en $k - 1$ couplages parfaits $M_1, \dots, M_{k-1}$ deux-à-deux arête disjoints.
- ❽ Alors E se décompose en k couplages parfaits deux-à-deux arête disjoints, $M_1, \dots, M_{k-1}, M_k$.

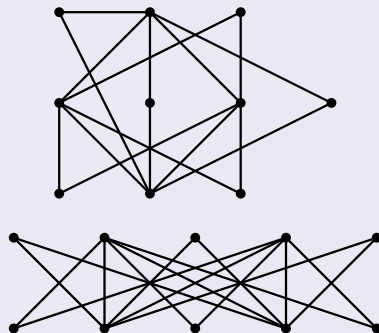
Énoncé

Trouver un couplage de cardinal maximum et un transversal de cardinal minimum dans le graphe biparti suivant :

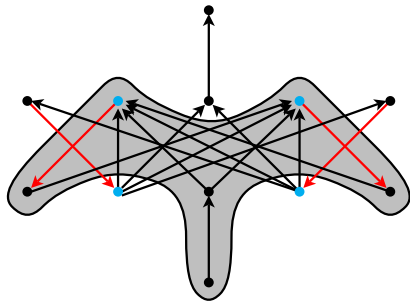
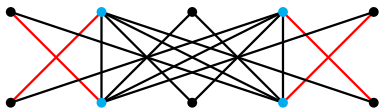


Solution

On voit que ces deux graphes sont isomorphes :



EXO 4.8



Algorithme glouton

ENTRÉE: Un graphe $G = (V, E)$.

SORTIE : Un couplage M de G .

Etape 1: *Initialisation.*

$M := \emptyset$.

Etape 2: *Construction du couplage.*

Tant qu'il existe $e \in E \setminus M$ tq $M + e$ est un couplage faire

$M := M + e$.

Etape 3: *Fin de l'algorithme.*

Arrêter avec M .

Énoncé

Montrer que l'algorithme glouton s'arrête avec un couplage M de taille au moins $\nu(G)/2$.

Solution

- ❶ Soit T l'ensemble des sommets M -saturés. Alors $|T| = 2|M|$.
- ❷ S'il y avait $e \in E(G - T)$ alors $M + e$ serait un couplage de G , l'algorithme aurait pu ajouter e , contradiction.
- ❸ T est donc un transversal de G , d'où $\tau(G) \leq |T|$.
- ❹ Par l'EXO 4.4(a), $\nu(G) \leq \tau(G)$.
- ❺ Les inégalités impliquent $\nu(G) \leq 2|M|$.